

# Estudo da Sensibilidade do Método de Newton-Raphson

Aluno: Ana Carolina Feres Coimbra, Orientadora: Michelli Marlane

<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação – Universidade Presidente Antônio Carlos (UNIPAC)  
Rua Palma Bageto Viol S/N – Barbacena – MG – Brasil

carolcoimbra3@yahoo.com.br, michelli1983@yahoo.com.br

**Abstract.** *It becomes increasingly necessary to use mathematical tools, looking for patterns through rigorous deductions and definitions, thereby establishing better results in projects in several areas, as well as in biology, medicine, dentistry, and also in structural engineering, which seeks to develop ways to increase performance on projects with the minimum cost, thereby reducing the raw material, transportation, manufacturing costs and thus increasing profits. Many types of structures have some type of nonlinear behavior, such as geometry, when the changes are in the geometry of the structure, physical, when the material exhibits nonlinear behavior, or contact when there is contact between the structures. In this sense, to perform structural analysis to determine the objective function and check its viability may require a nonlinear analysis. The following proposal uses the Newton-Raphson method, applied to a structural engineering problem of analyzing and ascertaining their sensitivity to change as the results of the variables / parameters influence the solution, thus identifying the load step and iteration that generate the lowest possible error .*

**Resumo.** *Torna-se cada vez mais necessário o uso de ferramentas matemáticas, procurando padrões por meio de deduções rigorosas e definições, estabelecendo assim melhores resultados nos projetos dentro de várias áreas, assim como em biologia, medicina, odontologia, e também na engenharia estrutural, que busca desenvolver maneiras de aumentar o desempenho nos projetos, com a minimização dos custos, reduzindo assim a matéria-prima, transporte, custo de fabricação e conseqüentemente aumentando os lucros. Muitos tipos de estruturas apresentam algum tipo de comportamento não-linear, como por exemplo geométrico, quando as mudanças são na geometria da estrutura, físico, quando o material apresenta comportamento não linear, ou de contato, quando há contato entre as estruturas. Neste sentido, ao realizar a análise estrutural para a determinação da função objetivo e verificação de sua viabilidade pode ser necessário uma análise não-linear. A seguinte proposta utiliza o método de Newton-Raphson, aplicado em um problema da engenharia estrutural analisando sua sensibilidade e averiguando como a alteração dos resultados das variáveis/parâmetros influencia a solução, identificando assim o passo de carga e a iteração que geram o menor erro possível.*

## 1. Introdução

Reduzir custos geralmente não é uma tarefa muito simples. Mas uma pequena redução nos custos de uma grande empresa, geralmente exerce um grande impacto sobre os lucros.

Com isso no mercado atual, a competitividade pelo sucesso é cada vez maior, sendo assim busca-se cada vez mais melhorar possíveis erros, minimizando custos , manutenção das estruturas e visando o melhor uso de materiais disponíveis.

### **1.1. Análise Estrutural**

Para [SILVA 2010], a análise estrutural é a parte da Mecânica que estuda as estruturas, se preocupando basicamente com a determinação dos esforços e das deformações a que elas estão submetidas quando solicitadas por agentes externos, tais como: carregamentos, variações de temperatura, movimentação de seus apoios e outros.

A noção de força é a mais intuitiva possível: podemos exercer uma força sobre um corpo por meio de um esforço muscular; uma locomotiva exerce força sobre os vagões quando os reboca; uma mola esticada exerce forças sobre peças que fixam suas extremidades; etc. Em todos os casos, deve existir um contato entre os corpos, ou seja, uma força de contato [SILVA 2010].

Para [VALE 2006], a estrutura é o conjunto formado pelas partes resistentes que garantem a estabilidade de um objeto de projeto, por exemplo, uma edificação. Quando se projeta uma estrutura, a análise do comportamento estrutural exige que sejam feitas algumas simplificações que conduzem a modelos estruturais. Para que se defina o sistema estrutural mais adequado, para uma determinada situação de projeto, devem ser considerados vários fatores. Os principais são:

1. Projeto arquitetônico:
  - Aspectos funcionais (dimensão do espaço interno, iluminação, limitações do espaço exterior, etc.);
  - Aspectos estéticos (sistemas diferentes geram formas diferentes).
2. Carregamento atuante:
  - Permanente;
  - Variável
3. Condições de fabricação, transporte e montagem da estrutura (vias de acesso);
4. Material estrutural a ser utilizado (cada material possui características mecânicas peculiares): o material deve estar adequado aos tipos de esforços solicitantes pelas estruturas. [VALE 2006].

Nos dias atuais, as estruturas têm sido projetadas em formas mais arrojadas, tornando-se cada vez mais esbeltas, leves, de modelagem complexa, mais baratas e seguras. Entretanto, os possíveis e prováveis comportamentos não-lineares, de forma geral, têm sido cada vez mais incorporados nas análises dessas estruturas. Alguns aspectos, nesse sentido, recebem destaque e devem tomar a atenção dos projetistas [SILVA 2011]:

1. Aspectos referentes ao real conhecimento do valor da carga crítica que a estrutura pode suportar;
2. O conhecimento exato do início do processo de instabilidade através dos efeitos de segunda ordem;
3. A identificação da carga de ruptura ou colapso, fatores de forma, surgimento de

rótulas plásticas, etc.

Além desses aspectos importantes, cabe ao projetista decidir sobre que tipo de análise será adotada (estática ou dinâmica); considerar efeitos de fluência, retração, fissuração, etc; Ter conhecimento e considerar as imperfeições iniciais, tensões residuais, etc. Entre outras questões, como cargas móveis, agentes externos, variação de temperatura. [SILVA 2011].

## 1.2. Análise Estrutural Linear

A análise linear considera os materiais elásticos-lineares. A elasticidade de um material está relacionada a sua tendência de voltar a sua configuração inicial após ter sofrido deformações decorrentes de ações externas. A Figura 1, ilustra uma função linear.

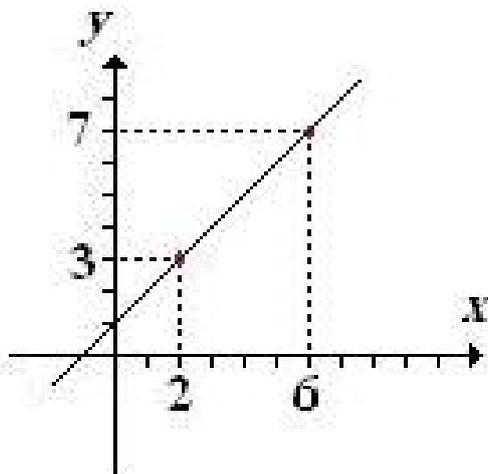


Figura 1. Reta Linear

## 1.3. Análise Estrutural Não-linear

Com muito mais frequência, nos dias atuais, as estruturas têm sido projetadas em formas mais arrojadas, tornando-se cada vez mais esbeltas, leves, de modelagem complexa, mais baratas e seguras. Entretanto, os possíveis e prováveis comportamentos não-lineares, de forma geral, têm sido cada vez mais incorporados nas análises dessas estruturas. Alguns aspectos, nesse sentido, recebem destaque e devem tomar a atenção dos projetistas [SILVA 2011]:

1. Aspectos referentes ao real conhecimento do valor da carga crítica que a estrutura pode suportar;
2. O conhecimento exato do início do processo de instabilidade através dos efeitos de segunda ordem;
3. A identificação da carga de ruptura ou colapso, fatores de forma, surgimento de rótulas plásticas, etc.

Além desses aspectos importantes, cabe ao projetista decidir sobre que tipo de análise será adotada (estática ou dinâmica); considerar efeitos de fluência, retração,

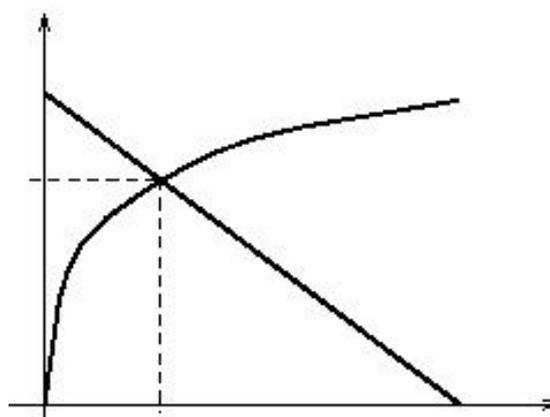
fissuração, etc; ter conhecimento e considerar as imperfeições iniciais, tensões residuais, etc. Entre outras questões, como cargas móveis, variação de temperatura, etc.

As causas comuns do comportamento não-linear de uma estrutura podem ser classificadas como:

1. Não-linearidade do material: ocorre quando as leis constitutivas que representam o comportamento do material são não-lineares;

2. Não-linearidade geométrica: quando as mudanças de geometria, provocadas pela aplicação do carregamento sobre a estrutura, são significativas, fazendo com que a configuração inicial e indeformada não possa ser considerada para a definição das equações de equilíbrio e compatibilidade;

3. Não-linearidade de contato, fronteira ou contorno: quando as condições de contorno iniciais, referentes às prescrições de deslocamentos, possam ser alteradas durante a aplicação do carregamento. Os problemas de contato ilustram muito bem essa situação, em que não é possível prever com exatidão qual a região que ocorrerá o contato entre duas superfícies [SILVA 2011]. A Figura 2 ilustra uma função não-Linear.



**Figura 2. Reta Não-Linear**

O foco deste trabalho é analisar a sensibilidade do método de Newton-Raphson, aplicado a estruturas com comportamento não-linear. Esses parâmetros dependerão de cada caso, onde busca-se encontrar o menor erro possível em cada análise, que nem sempre será simples de determinar, sendo esta a motivação para o presente trabalho.

## **2. Materiais e métodos**

Para realização deste trabalho, foi utilizado o método de Newton-Raphson, para análise estrutural, e um algoritmo já implementado em [SILVA 2011], no ambiente Microsoft Developer Studio, na linguagem de programação Fortran, que foi a primeira linguagem de programação de alto-nível concebida, criada em 1954 pela IBM, derivada de equações científicas em código computacional. É também uma linguagem expressiva, de fácil utilização. A linguagem Fortran é assim uma linguagem procedimental, ou seja, baseia-se na programação como uma sequência de instruções, isto é, como um conjunto de programas para os quais é necessário fornecer determinadas instruções [GUALTI 2006].

## 2.1. Análise não-linear geométrica

Para introduzir a formulação de um problema de análise não-linear geométrica de uma estrutura reticulada e como resolvê-lo, utiliza-se a seguir o exemplo clássico de uma treliça abatida de duas barras.

## 2.2. A Treliça abatida de 2 barras

Para ilustrar o exemplo de uma estrutura com comportamento não-linear geométrico adota-se a treliça abatida de 2 barras que pode ser considerado o exemplo mais difundido para explicar tal comportamento. Seja a treliça mostrada na Figura 3, que tem sua configuração indeformada definida pela linha pontilhada.

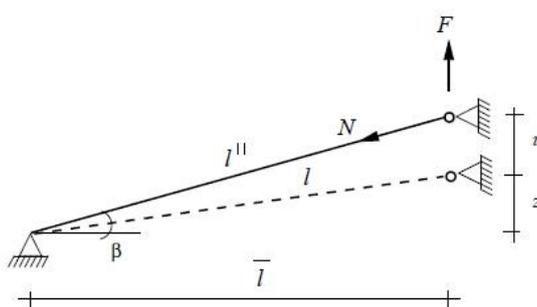


Figura 3. Treliça abatida de 2 barras

Usando a equação de equilíbrio das forças na direção vertical, e admitindo-se que o ângulo  $\beta$  é muito pequeno, tem-se:

$$F = N \sin \beta = \frac{N(z+u)}{l'} \approx \frac{N(z+u)}{l} \quad (1)$$

onde  $F$  é a carga vertical aplicada e  $N$  é o esforço normal na barra. Usando-se o teorema de Pitágoras, pode-se escrever a equação que determina a deformação da barra:

$$\epsilon = \frac{((z+u)^2 + \ell^2)^{1/2} - (z^2 + \ell^2)^{1/2}}{(z^2 + \ell^2)^{1/2}} \quad (2)$$

$$= \left(\frac{z}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{u}{\ell}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 \quad (3)$$

$$\approx \left(\frac{z}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{u}{\ell}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 \quad (4)$$

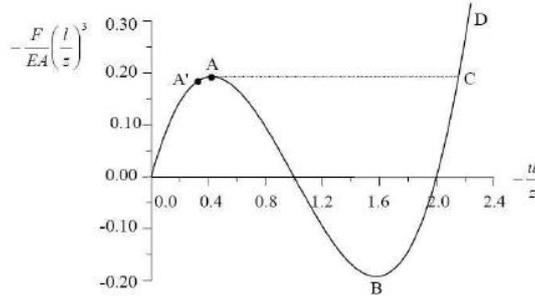
Essa equação é considerada uma aproximação para a definição das deformações, sendo conveniente para exemplificar as estratégias para a solução de problemas não lineares. O esforço normal  $N$  pode, então, ser calculado como:

$$N = EA\epsilon = EA\left(\left(\frac{z}{l}\right)\cdot\left(\frac{u}{l}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u}{l}\right)^2\right) \quad (5)$$

E a carga  $F$  pode ser escrita em função do deslocamento  $u$  como:

$$F = \frac{EA}{l^3}\left(z^2u + \frac{3}{2}zu^2 + \frac{1}{2}u^3\right) \quad (6)$$

A representação gráfica dessa equação, ilustrada na Figura 4, mostra claramente um comportamento não-linear. Pode-se observar que, se as barras forem carregadas com uma força crescente  $-F$ , no ponto A, não será possível acompanhar a trajetória real, e poderá ocorrer um salto brusco para uma configuração referente ao ponto C. A este salto estariam associados efeitos dinâmicos não desprezíveis que conduziriam a oscilações em torno desse último ponto. Em situações como esta, faz-se necessário o uso de uma estratégia adequada para construir a trajetória de equilíbrio. Usa-se, então, métodos iterativos capazes de representar as soluções em cada ponto dessa trajetória.



**Figura 4. Diagrama carga-deslocamento para barra isolada**

No entanto, algumas dificuldades podem ser encontradas para representar as soluções após o ponto A. A construção da curva com comportamento não-linear, mostrada na Figura, pode ser feita através do conhecimento da inclinação da mesma em vários pontos. Esta tangente é a derivada da força  $F$  em relação ao deslocamento  $u$ . Assim, tem-se:

$$K_t = \frac{dF}{du} = \frac{z+u}{l} \frac{dN}{du} + \frac{N}{l} = \frac{EA}{l} \left(\frac{z+u}{l}\right)^2 + \frac{N}{l} = \frac{EA}{l} \left(\frac{z}{l}\right)^2 + \frac{EA}{l} \left(\frac{2zu+u^2}{l^2}\right) + \frac{N}{l} \quad (7)$$

onde  $K_t$  é chamada de matriz de rigidez tangente, e usando a Eq. resultaria em:

$$K_t = \frac{dF}{du} = \frac{EA}{l^3} \left(z^2 + 3zu + \frac{3}{2}u^2\right) \quad (8)$$

Na configuração inicial, ainda sem o conhecimento do deslocamento  $u$ , a matriz de rigidez tangente é equivalente á matriz de rigidez elástica linear, que depende somente da configuração geométrica inicial da estrutura. Nas configurações seguintes, a matriz de rigidez tangente é a soma da matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica. Tem-se, então, em forma matricial:

$$[K_t] = [K_E] + [K_G] \quad (9)$$

onde  $[K_E]$  é a matriz de rigidez elástica e  $[K_G]$  é a matriz de rigidez geométrica.

Para a obtenção da curva entre a força  $F$  e o deslocamento  $u$  da Figura 4, pode-se usar uma estratégia iterativa de controle de deslocamento, ou seja, dado  $u$  acha-se  $F$ . Para sistemas reais, com vários graus de liberdade, o controle de deslocamentos não é trivial, sendo usualmente necessário recorrer a um controle de forças. E, para isso, é necessário o uso de um método iterativo incremental, como por exemplo, o Método de Newton Raphson, que será usado na solução dos problemas não-lineares abordados neste trabalho

### 2.3. O Método de Newton-Raphson

O método utilizado, no presente trabalho, para a resolução de análise não-linear é o Método de Newton-Raphson. Que será explicado a seguir. Dada a equação:

$$\vartheta = \frac{N(z + u)}{l} + K_s u - F = 0 \quad (10)$$

que ilustra o problema não-linear a resolver. O método iterativo obtém-se a partir de uma série de Taylor truncada

$$\vartheta_n \approx \vartheta_0 + \frac{d\vartheta_0}{du} \delta u + \frac{1d^2\vartheta_0}{2du^2} (\delta u^2) \quad (11)$$

onde o índice '0' indica que as quantidades são calculadas na posição inicial. Desse modo, dada uma estimativa inicial da solução  $u_0 \neq 0$ , é possível obter uma melhor estimativa para a solução ignorando os termos de ordem dois e superior na equação 11 e fazendo  $\vartheta_0 = 0$  Isso resulta em

$$\delta u_0 = -\left(\frac{d\vartheta_0}{du}\right)^{-1} \vartheta_0(u_0) \quad (12)$$

e numa nova estimativa para a solução  $u_1$

$$u_1 = u_0 + \delta u_0 \quad (13)$$

O processo iterativo continua com correções adicionais ao deslocamento até se alcançar uma solução com a precisão desejada.

## 2.4. Interpretação Gráfica do Método de Newton-Raphson

Para [SADOSKY 1980] a Figura 5 traduz a aplicação do método de Newton-Raphson a uma função.

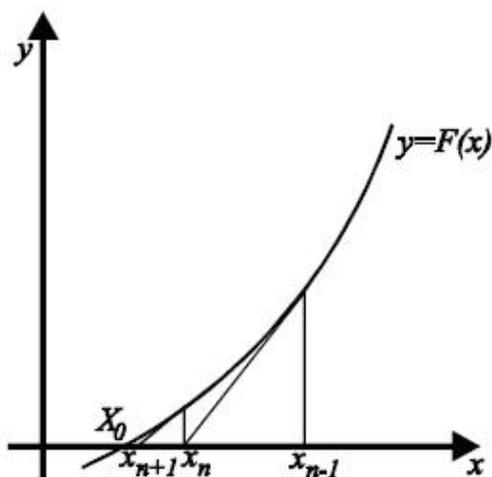


Figura 5. Método de Newton-Raphson

A Figura 6 mostra um caso em que o método não converge. Nota-se que entre  $x_0$  e  $x_1$  existe um ponto de inflexão da função  $f(x)$  e que em  $x_1$  a derivada  $f'(x)$  é próxima de zero.

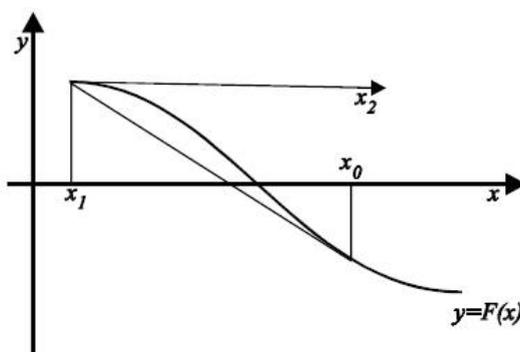


Figura 6. Não Convergência do Método

As condições suficientes de convergência podem ser estabelecidas com mais rigor: Seja  $[a, b]$  um intervalo que contém uma só raiz da equação  $f(x) = 0$ . A sucessão de valores  $x_i$  gerados pelo método de Newton-Raphson é monótona e limitada pela raiz  $x_i$  (e portanto convergente) se:

1.  $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
2.  $f''(x)$  é de sinal constante em  $]a, b[$ , ou seja,  $f''(a) \cdot f''(b) > 0$
3. O valor inicial  $x_0$  for o extremo do intervalo  $[a, b]$  em que  $f(x_0) \cdot f'(x_0) < 0$ , isto é toma-se  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$  de modo que  $f(x_0)$  tenha o mesmo sinal. [SADOSKY,1980]

## 2.5. Algoritmo para análise não-linear geométrica

O processo iterativo para a resolução da análise não-linear geométrica pode ser enumerado da seguinte forma:

1. Fazer a análise linear da estrutura e obter os deslocamentos para o primeiro passo de carga;
2. Atualizar as coordenadas dos nós da estrutura considerando os deslocamentos do passo anterior;
3. Calcular os esforços internos nas barras;
4. Calcular, em cada nó, a resultante dos esforços internos nas direções globais dos eixos da estrutura;
5. Calcular o vetor de desequilíbrio entre as ações externas aplicadas e as calculadas no passo anterior;
6. Montar a matriz de rigidez geométrica da estrutura que irá compor o sistema de equações de equilíbrio. Checar o determinante dessa matriz. Se negativo, ocorrerá perda de estabilidade. Se não, a estrutura será analisada, considerando o vetor de desequilíbrio. Novos incrementos de deslocamento serão obtidos;
7. Atualizar as coordenadas;
8. Repetir os passos de 3 a 7, até que o vetor de desequilíbrio atenda a tolerância de erro estabelecida [SILVA 2011].

## 3. Resultados

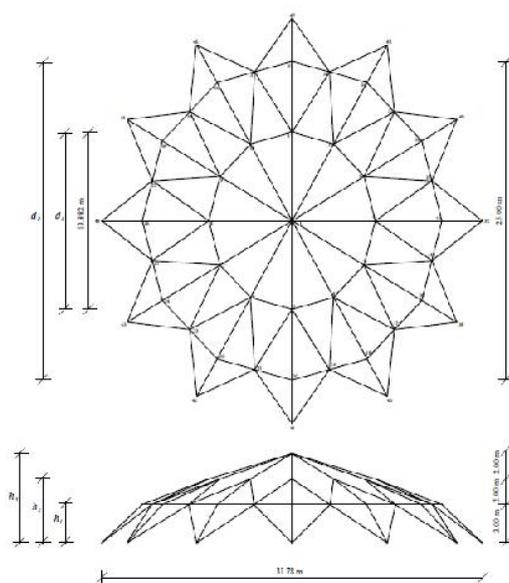
### 3.1. Domo de 120 Barras

Segundo [ROMÃO, 2002], treliças são sistemas de barras rígidas ligadas entre si por extremidades rotuladas e com o exterior de modo a formar um sistema estável. Esta definição leva a colocação de algumas hipóteses simplificadoras para facilitar sua análise, que são: as articulações das extremidades das barras não tem atrito e as cargas da estrutura são caracterizadas por forças aplicadas apenas por nós. Outra característica interessante das treliças é de que em linhas gerais o peso próprio destas estruturas é consideravelmente inferior às cargas a que estão sujeitas, por isso que na maioria dos cálculos seu peso próprio é desprezado. Como toda estrutura, nas treliças deseja-se estabilidade, que é a garantia de que não haverá qualquer movimento livre segundo qualquer direção.

O primeiro estudo foi o Domo 120 barras mostrado na figura 7 .

Onde através do arquivo de entrada, foi gerado um arquivo de saída, e analisadas as iterações, que é quantas vezes é dividido o carregamento, e os passos de carga, que é qual peso será o carregamento, definindo assim como os resultados das variáveis/parâmetros identificará o menor erro possível, essas variáveis foram escolhidas em pares, aleatoriamente 2 números e depois invertendo-os. A Tabela 1 apresenta os principais resultados.

No começo, foi analisado aleatoriamente, 3 passos de carga, com 1 iteração, o erro foi  $.37499997D + 02$ , relativamente maior quando foi definido 1 passo de carga e 3 iterações.



**Figura 7. Domo de 120 Barras**

**Tabela 1. Análise do Passo de carga e Iteração do Domo 120 barras**

Passo de carga	Iteração	Erro
3	1	.37499997D+02
1	3	.27525510D-04
2	14	.67873803D-05
14	2	.30916262D-01
8	4	.20529656D-04
4	8	.58395507D-05
2	16	.67890450D-05
16	2	.32774593D-04
6	2	.30737282D-01
2	6	.67808771D-05
4	2	.30717380D-01
2	4	.67792894D-05

Ao modificar para 2 o passo de carga, e 14 o número de iterações, e depois inverter os mesmos, o erro caiu de  $.67873803D - 05$  para  $.30916262D - 01$ . Agora foi analisado 8 passo de carga, e 4 iterações, obtendo um erro de  $.20529656D - 04$ , que aumenta para  $.58395507D - 05$ , quando troca-se o passo de carga e a iteração respectivamente para 4 e 8. Aumenta mais uma vez para  $.67890450D - 05$ , quando muda novamente a iteração para 16, e o passo de carga para 2. Ao analisar 16 passos de carga e 2 iterações, o erro diminui para  $.32774593D - 04$ , como mostrado na tabela 1.

O próximo passo foi modificar o passo de carga para 6, e a iteração para 2, que produz um erro de  $.30737282D - 01$ , modifica-se novamente o passo de carga e a iteração, respectivamente para 2 e 6, o erro aumenta para  $.67808771D - 05$ . Em seguida o passo de carga aumenta para 4, e a iteração para 2, o erro foi  $.30717380D - 01$ .

Modifica-se a iteração para 4, e o passo de carga para 2, o erro aumenta para

.67792894D – 05.

Note que nas análises o erro diminui quando aumenta o número de iterações, e aumenta quando aumenta o número de passo de carga, por fim chegando em um erro menor que os anteriores, definindo assim, o menor erro encontrado, que foi .58395507D – 05 a partir de 4 passos de carga e 8 iterações.

### 3.2. Pórtico Plano de 70 Barras

O segundo estudo foi feito com uma estrutura de Pórtico de 70 Barras. Os pórticos são estruturas lineares planas constituídas por barras retas articuladas entre si. São resultados da associação entre vigas e pilares de estruturas maciças ou ocas, que segundo [SILVA 2011], se resume em um conjunto de colunas verticais, que sustentam vigas nas horizontais, como mostra na figura 8.

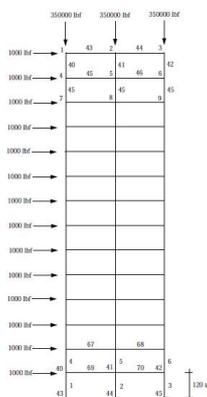


Figura 8. Pórtico Plano de 70 Barras

Na Tabela 2 pode-se destacar o resultado obtido na utilização de 10 passos de carga e 2 iterações, escolhidos aleatoriamente, encontra-se o erro de .97044710E – 01, notadamente maior que o inverso, 2 passos de carga e 10 iterações, que contém o erro de .24435950E – 01.

Em seguida troca-se o passo de carga e o número de iterações respectivamente para 7 e 3, que fez que com erro aumentasse para .93392450E – 01, posteriormente caindo para .46635420E – 01, ao trocar o passo de carga para 3, e 7 o número de iterações.

Quando muda a iteração para 7, e o passo de carga para 10, o erro fica .10206080E + 00. Ao inverter o passo de carga e a iteração respectivamente para 10 e 7, o erro aumenta para .96788560E – 01 como mostrado na tabela 2.

O próximo passo foi aumentar o passo de carga para 8 e a iteração para 15, resultando em um erro de .52012800E – 01, que aumenta para .92529950E – 01, quando inverte o passo de carga e a iteração respectivamente para 15 e 8.

O erro diminui mais uma vez para .42930030E – 01, quando mudamos o passo de carga para 10 e a iteração para 18, que aumenta relativamente quando invertemos os valores de passo de carga e iteração para 18 e 10

Observe que nas análises o erro diminui quando aumenta o número de iterações, e aumenta quando aumenta o número de passo de carga, por fim chegando em um erro

menor que os anteriores, definindo assim, o menor erro encontrado, que foi  $.24435950E-01$  a partir de 2 passos de carga e 10 iterações.

**Tabela 2. Análise do Passo de carga e Iteração do Pórtico Plano 70 barras**

Passo de carga	Iteração	Erro
10	2	.97044710E-01
2	10	.24435950E-01
7	3	.93392450E-01
3	7	.43635420E-01
7	10	.10206080E+00
10	7	.96788560E-01
10	18	.42930030E-01
18	10	.90437000E-01
7	11	.41041990E-01
11	7	.48386820E-01

#### 4. Conclusões

As estruturas estão sujeitas a muitas deformações, devido ao efeito climático- chuvas, ventos- e também de carregamentos mal planejados, produzindo assim uma deformação muitas vezes irreparável. Em que pode-se precisar de uma solução para tal problema, tentando reconhecer que as estruturas recebam somente o que elas suportam.

Com mais frequência, métodos numéricos, como o de Newton-Raphson, tem sido utilizados para a resolução de problemas da análise estrutural não-linear, pois fornecem uma certa precisão, e encontram os resultados com uma convergência mais rápida.

As análises foram feitas com números aleatórios, introduzidos ao método de Newton-Raphson já implementado na linguagem de programação Fortran, por ser a melhor linguagem para tratamento de problemas desta natureza, ou seja, problemas que envolvem um grande número de operações matemáticas.

Os resultados analisados foram os erros obtidos através dos passos de carga e das iterações, procurando sempre encontrar os menores erros possíveis.

Conclui-se que após analisar as duas estruturas que quanto maior o número de iterações, menor o erro, definindo assim a melhor solução para o problema caracterizado neste trabalho.

#### Referências

- Hostetler L. (1998). *Cálculo com Aplicações*. 4º edição.
- Campos F. (1987). *Cálculo Numérico com Aplicações*. 2º edição.
- Sadosky M. (1973). *Cálculo Numérico e Gráfico*. 8º edição.
- Rebello P. (2005). *Estruturas de Concreto*.
- Silva M. (2011). Otimização de Estruturas Reticuladas Incluindo não-linearidade Geométrica Mestrado em Modelagem Computacional *Universidade Federal de Juiz de Fora*.

- Filho L. A. (2001). Análise não-linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais  
Doutorado em Engenharia Civil *Universidade do Estado de Santa Catarina*.
- Nogueira C. G. (2006). Análise não-linear de Estruturas de Barras de Concreto Armado  
Doutorado em Engenharia das Estruturas *Universidade Federal de São Paulo*.
- Arenga M. (2007). Relatório Técnico de Licenciatura em Informática *Universidade  
Autónoma de Lisboa*.
- Vale A. (2006). Análise Estrutural *Universidade Federal de Santa Catarina*.
- Silva M. (2010). Análise Estrutural, Conceitos Fundamentais *Universidade Federal de  
Santa Catarina*.
- Fontes F. F. (2005). Análise Estrutural de Elementos Lineares *Universidade de São Paulo*.
- Corrêa. (2003). Análise Estrutural de Treliça 3D via FEM *Universidade do Estado do  
Paraná*.
- Romão X. (2003). *Sistemas Articulados - Mecânica I*. 1º edição.