PROBLEMA DE TRANSPORTE: MODELO E MÉTODO DE SOLUÇÃO

Luciano Pereira Magalhães - 8º - noite
lpmag2@hotmail.com
Orientador: Prof Gustavo Campos Menezes
Banca Examinadora: Prof Reinaldo Sá Fortes, Prof Eduardo Bhering, Prof Gustavo Campos Menezes
UNIVERSIDADE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS – UNIPAC
FACULDADE DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO E COMUNICAÇÃO SOCIAL - FACICS

***Resumo*:** O objetivo deste trabalho é apresentar modelos matemáticos para resolução do problema de transporte, afim de determinar o carregamento de uma rede que possibilite minimizar o custo total do transporte.

1. Introdução

Com base em **[3]** e **[4]**; no mundo de hoje, o avanço tecnológico, a globalização e o aumento constante da competitividade, entre outros fatores, tornam os problemas mais complexos em praticamente todas as áreas do mercado, obrigando as empresas a serem cada vez mais eficientes. Elas precisam cada vez mais rápido, decidir como disponibilizar seus produtos no local onde o mercado o exige, de forma a obter o máximo retorno com o mínimo custo possível, ou seja, precisam otimizar seus processos. Alguns problemas práticos de operação no cotidiano das empresas, como a análise de decisões que se preocupa exatamente com a avaliação de alternativas para "escolher a melhor solução dentre as finitas maneiras de realizá-la", ou seja, enumerar as soluções possíveis e escolher a melhor.

Durante o processo geral de produção, comercialização e distribuição de um determinado produto, as empresas devem cumprir com os prazos de entrega estabelecidos, para que não venha trazer insatisfação nos clientes e com isso perda de mercado. A programação linear é um dos recursos matemáticos usados para maximizar ou minimizar funções lineares sujeita a algumas restrições pré-determinadas, e está intimamente direcionada para a resolução de situações complexas. Por meio dela, poderemos escolher a melhor alternativa, consideradas as variáveis para a obtenção de um resultado previamente definido.

1.1 Formas de Programas Lineares

O modelo a seguir extraido de **[10]** apresenta uma forma geral de problemas de programação linear. O problema de Programação Linear esta direcionado para a resolução de situações complexas com inúmeras variáveis, mas com objetivos definidos. A Programação Matemática consiste na determinação do valor de n variáveis $X1, X2, \ldots, Xn$ que tornam mínimo ou máximo, dependendo do objetivo, valor da funcão: $f(x1, x2, \ldots, xn)$

sujeito a m restrições

$$gi(x1, x2, \ldots, xn) \geq bi, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

podendo ainda ter-se

$$xj \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Em programação linear quando as restrições de um modelo são apresentadas na forma de inequações, diz-se que esse modelo está na Forma Canônica:

Minimize

$$Z = C1X1 + C2X2 + \ldots + CnXn$$

Sujeito à restrições:

$$\begin{aligned}
&a11X1 + a12X2 + \ldots + a1nXn \geq b1 \\
&a21X1 + a22X2 + \ldots + a2nXn \geq b2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&am1X1 + am2X2 + \ldots + amnXn \geq b2
\end{aligned}$$

Função a minimizar: **função objetivo.**

Inequações: **restrições.**

Conjunto de soluções que satisfazem as restrições: **soluções admissíveis.**

Solução admissível que minimiza a função objetivo: **solução otima.**

Coeficientes Cj: **coeficientes de custo.**

Coeficientes aij: **coeficientes tecnológicos.**

Coeficientes bi: **termos independentes.**

1.2 O Problema de Transporte

Com base no livro **[2], [8] e [9]**, pode-se dizer que o problema de transporte pode ser formulado como um problema de programação linear. O primeiro e mais importante passo da resolução de um problema de transporte é a sua identificação, após isso teremos mais condições de formularmos um modelo que poderemos usar para resolver o problema. O Problema de Transporte consiste basicamente em determinar a situação da distribuição de um determinado produto que:

1. inicialmente, se encontra disponível em *m* origens com capacidades de fornecimento *ai* > 0, sendo *i* = 1, 2, . . . , *m* (oferta);

2. será utilizado em *n* destinos, que podem absorver uma quantidades *bj* > 0, sendo *j* = 1, 2, . . . , *n* (procura);

3. deve ser enviado para os destinos, esgotando as disponibilidades de cada origem(fontes) e satisfazendo as necessidades em cada destino(demanda). Além disso procurar minimizar o custo total envolvido no processo de distribuição desse produto. Sabendo que o custo unitário de transporte do produto da origem *i* para o destino *j* é dado por *Cij*, o processo de distribuição desse produto pode ser representado através de um grafo, denotado por *G* = (*V,E*), em que *V* é o conjunto de nós e *E* o conjunto de arcos que ligam regiões com atividades econômicas interdependentes. A FIGURA 1 abaixo apresenta um sistema de transporte com três fontes e três destinos:

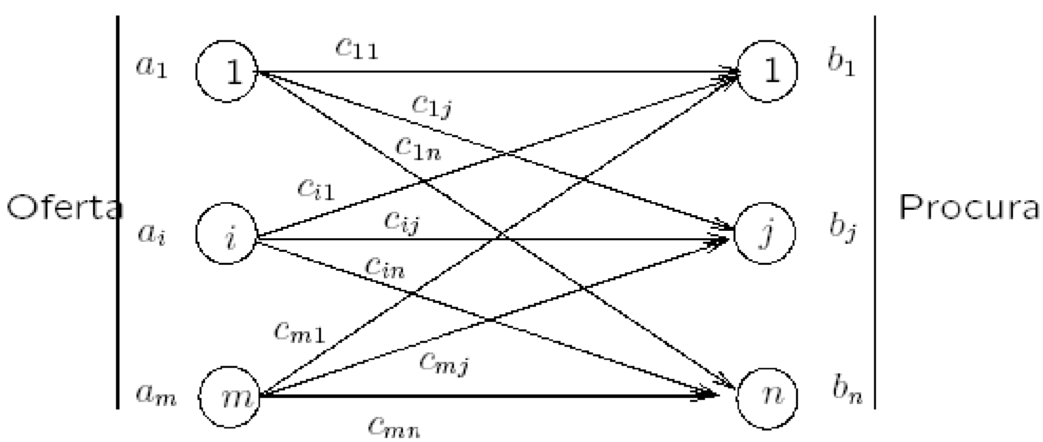

FIGURA 1 Sistema de transporte com três fontes e três destinos

2. Formulação Matemática do Problema

Com base no livro **[1] e [4]** podemos dizer que, o objetivo do problema é determinar o número de unidades que devem ser transportadas de cada fonte para cada destino de maneira a minimizar o custo total de transporte. Para conseguir atingir os resultados esperados o modelo será formulado com base na *função objetivo* abaixo, que é de fundamental importância para resolução do problema:

Minimizar Z = $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Onde:

Z = Custo total de transporte;

Cij = Custo de transporte do produto que vai da fonte *i* para o destino *j*;

X*ij* = Representa o número de unidades a serem transportadas da fonte *i* para o destino *j* ; sendo:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

obedecendo às seguintes restrições:

- o número total de unidades transportadas, a partir da fonte i, deve ser igual à capacidade de fornecimento a*i* da fonte:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m$$

- O número de unidades transportadas para o destino *j*, deve ser igual à sua capacidade de absorção *bj*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n$$

Para que o problema seja possível de ser resolvido é necessário que a quantidade de produtos a ser transportada da fonte seja igual à que chega aos destinos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

3. Aplicação Pratica do Problema de Transporte

Vejamos o exemplo a seguir extraido de **[9].** Suponhamos que uma empresa possui dois armazéns $A1$ e $A2$ com 100 e 50 unidades de um determinado produto, a qual deve ser transportado para três mercados $M1$, $M2$ e $M3$ que consomem respectivamente 80, 30 e 40 unidades. Além disso os custos de transporte dos armazéns *Ai* para os mercados *Mj* são dados pela TABELA 1 abaixo:

	M*1*	M*2*	M*3*
A*1*	5	3	2
A*2*	4	2	1

TABELA 1 - Custos de transporte

O grafo que representa este problema é a FIGURA 2 abaixo, sistema de transporte com duas fontes e três destinos:

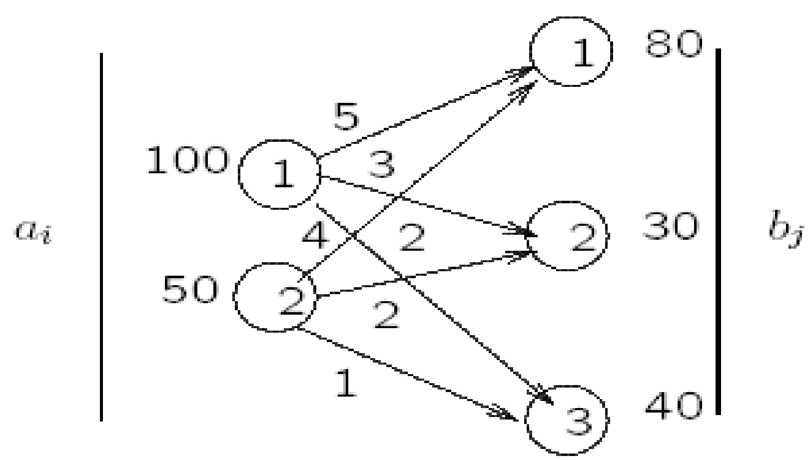

FIGURA 2 - Sistema de transporte com duas fontes e três destinos

A formulação matemática deste problema é a seguinte:

Minimizar Z = $5.x11 + 3.x12 + 2.x13 + 4.x21 + 2.x22 + 1.x23$;

Sujeito às restrições:

- de capacidade das fontes: $x11 + x12 + x13 = 100$

  $x21 + x22 + x23 = 50$
- de absorção pelos destinos: $x11 + x21 = 80$

  $x12 + x22 = 30$

  $x13 + x23 = 40$
- custos de transporte das rotas: C11 = 5; C12 = 3; C13 = 2;

  C21 = 4; C22 = 2; C23 = 1;

com $Xij \geq 0$, $i = 1, 2;$ $j = 1, 2, 3.$

Para facilitar o entendimento vamos utilizar a TABELA 2 abaixo:

Origens	Destinos			Oferta
	1	2	3	
1	5 X11	3 X12	2 X13	100
2	4 X21	2 X22	1 X23	50
Demanda	80	30	40	

TABELA 2

3.1 Determinação de uma Solução Básica Inicial

A solução básica inicial é a primeira solução que safistaz a todas as restrições, tendo as variáveis X*ij* com valores nulos ou positivos. Para encontrar tal solução, existem dois métodos que vamos utilizar e que foram extraidos do livro **[2]**:

- **Método do Custo Minímo**
- **Método do Canto Noroeste**

3.1.1 Método do Custo Minímo

O método do custo minímo é o mais utilizado e apresenta, quase sempre, uma solução incial que é ótima. O objetivo desse método é procurar por um solução viável inicial de menor custo total. O procedimento é o seguinte:

- Atribuir o maior valor possível à variável que tenha o menor custo de transporte e cortar a linha ou coluna satisfeita. No exemplo acima, devemos fazer X23 = 40, já que C23 = 1, eliminando-se a terceira coluna da demanda, que se encontra satisfeita.
- Ajustar os elementos da linha ou coluna não ajustada, a partir da variável que tem o menor custo. Assim, no exemplo, temos que fazer X22 = 10, já que C22 = 2, o que satisfaz a segunda linha da oferta.
- Repetir o processo para as variáveis que tenham outros custos, em ordem crescente. Sendo assim, devemos fazer X*12* = 20, já que C*12* = 3, eliminando a segunda coluna da demanda e ajustando a primeira linha com o valor X*11* = 80, completando o quadro.

Vejamos como fica a TABELA 2 ao aplicarmos o método do custo minimo:

Solução esta representada abaixo pela TABELA 3:

$x_{11} = 80$, $x_{12} = 20$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 40$

$x_{13} = 0$, $x_{21} = 0$

Z = 80*5 + 20*3 + 0*2 + 0*4 + 10*2 + 40*1 = 520

Origens	**Destinos**			**Oferta**
	1	**2**	**3**	
1	*5* 80	*3* 20	*2* nb	**100**
2	*4* nb	*2* 10	*1* 40	**50**
Demanda	**80**	**30**	**40**	

TABELA 3

Nota-se que as variáveis X21 e x13 assumem valor nulo, ou seja, elas não fazem parte da expressão e são ditas variáveis não básicas(nb).

Facilmente se constata neste quadro que as somas dos valores das variáveis em cada linha (coluna) são iguais ao valor de oferta (procura) referente a essa linha (coluna). Isto significa que a solução dada neste quadro satisfaz as relações de igualdade do problema de transportes.Como além disso todos os valores das variáveis são não negativos, trata-se de uma solução admissível do problema.

3.1.2 Método do Canto Noroeste

Veremos abaixo os procedimentos que são realizados pelo método do canto noroeste para obtenção da solução básica inicial:

Começa-se por dar um valor não negativo à variável situada na entrada a noroeste ($x11$). Este valor é atribuido de modo a não violar nenhuma das restrições de igualdade e ao mesmo tempo esgotar uma das ofertas ou procura. Assim

$$x11 = \min \{a1, b1\}$$

Primeiro Caso: Se $a1 < b1$. A oferta na linha 1 é esgotada, mas a procura na coluna 1 fica por satisfazer e terá o valor $b1 - a1$. Portanto todas as variáveis dessa linha serão nulas (não básicas) e essa linha deixa de ser considerada.

Segundo Caso: Se $b1 < a1$. É a situação inversa da anterior. A procura na coluna 1 é esgotada enquanto a linha 1 passa a ter uma oferta de $a1 - b1$. A coluna 1 deixa de ser considerada em futuros desenvolvimentos, ou seja, as restantes variáveis dessa coluna são não básicas com valor nulo.

Terceiro Caso: Se $a1 = b1$. Neste caso tanto a oferta quanto a procura são esgotadas.

Este tipo de processo é repetido até que $m + n - 1$ iterações conduzirão a uma solução básica admissível.

Vamos aplicar o método do canto noroeste ao nosso exemplo:

$$x11 = \min \{80, 100\} = 80$$

e esgota-se a procura na coluna 1. Então a outra variável dessa coluna, $x21$ será nula e não básica. A oferta na linha 1 passará a ser 100 - 80 = 20. Portanto após a primeira iteração teremos a TABELA 4 abaixo:

Origens	**Destinos**			**Oferta**
	1	**2**	**3**	
1	*5* 80	*3*	*2*	**20**
2	*4* nb	*2*	*1*	**50**
Demanda	**0**	**30**	**40**	

TABELA 4 - Após primeira iteração

A regra do canto noroeste vai agora determinar o valor da variável

$x12 = \min\{20, 30\} = 20$

A oferta fica esgotada e a procura nessa coluna vai ficar igual a 30 - 20 = 10, obtendo-se a TABELA 5 abaixo:

Origens	Destinos			Oferta
	1	**2**	**3**	
1	*5* 80	*3* 20	*2* nb	**0**
2	*4* nb	*2*	*1*	**50**
Demanda	**0**	**10**	**40**	

TABELA 5 – Após segunda iteração

A regra do Canto Noroeste escolhe agora

$x22 = \min\{10, 50\} = 10$

obtendo-se a TABELA 6 abaixo:

Origens	Destinos			Oferta
	1	**2**	**3**	
1	*5* 80	*3* 20	*2* nb	**0**
2	*4* nb	*2* 10	*1*	**40**
Demanda	**0**	**0**	**40**	

TABELA 6 – Após terceira iteração

Por fim, $x23 = \min\{40, 40\} = 40$ e obtendo-se a TABELA 7:

Origens	Destinos	Oferta

	1	2	3	
1	5 80	3 20	2 nb	0
2	4 nb	2 10	1 40	0
Demanda	**0**	**0**	**0**	

TABELA 7 – Após a quarta iteração

por coincidência corresponde à mesma solução admissível encontrada pelo método do custo minímo que apresentamos anteriormente.

3.2 Obtenção Da Solução Ótima

O método a seguir foi extraido do livro **[2].** Para testar a otimização da solução encontrada e determinar a variável que deve entrar na base, caso exista alguma, vamos utilizar o seguinte método:

- **Método dos Multiplicadores**

Primeiro passo: Definir as variáveis Ui e Vj

- A cada fonte i è associada uma variável Ui.
- A cada destino j é associada uma variável Vj.

Para o exemplo teremos:

u1, u2, v1, v2, v3

Segundo passo: Desenvolver as equações

- A cada *variável básica Xij* da solução inicial, deve-se associar a seguinte equação:

$$ui + vj = cij$$

Para o exemplo teremos:

para x11: $u1 + v1 = 5$;

para x12: $u1 + v2 = 3$;

para x22: $u2 + v2 = 2$;

para x23: $u2 + v3 = 1$;

Para resolver o sistema, devemos tomar uma variável qualquer e igualá-la a zero, fazendo u1 = 0, encontramos:

$$u1 = 0, v1 = 5, v2 = 3, u2 = -1, v3 = 2$$

Terceiro passo: Encontrar o ganho ou perda de inserir uma *varíavel não básica*(não incorporada à solução) na base

- A cada variável não básica(xij) deve-se calcular:

  Pij = Cij – ui – vj;

- Se Pij ≥ 0 a solução é ótima.
- Se Pij < 0 a solução não é ótima, ou seja, existe outra melhor.

para o exemplo teremos:

Para x21: P21 = 4 + 1 - 5 = 0

Para x13: P13 = 2 + 0 +2 = 4

Como não há avaliação negativa, a solução é ótima, entretanto a avaliação de x21 é nula, existe outra solução ótima.

4. Conclusão

O modelo apresentado neste trabalho é de fundamental importância para resolução de problemas reais, muito frequente e de enorme aplicação no processo de distribuição dos produtos que são comercializados por parte das empresas(fabricas e consumidor) envolvidas, oferecendo um retorno desejável tanto para o cliente quanto para a empresa. A otimização de custos e recursos, voltado ao atendimento dos requerimentos dos clientes cria diferenciais para empresas com relação aos concorrentes aliado a rápidos retornos de investimento.

O modelo pode ser expandido para um quantidade maior de fontes, destinos e rotas, visando encontrar rotas alternativas e tornando o problema a ser resolvido mais flexível. Com auxilio do processamento computacional podemos rapidamente encontrar soluções viáveis e testar se elas são ótimas, podendo até mesmo acarretar um aumento da competitividade da empresa frente a outras.

Algumas ferramentas(softwares) que podem ser utilizadas para resolver o problema de transporte estão descritas abaixo e podem ser encontradas em http://geocities.yahoo.com.br/algomesjr2004:

- **LINDO** (Linear, INteractive, and Discrete Optimizer) é uma conveniente, mas poderosa ferramenta para resolver Problemas de Programação linear, inteira e quadrática.

- **LINGO** é uma ferramenta simples para utilizar o poder da otimização linear ou não-linear para formular problemas grandes concisamente, resolvê-los e analisar a solução.
- **SOLVER DO EXCEL** com o Solver você pode localizar um valor ideal para uma fórmula em uma célula - chamada de célula de destino - em uma planilha.
- **XPRESS-MP**, assim como o LINDO, é uma poderosa ferramenta de modelagem e otimização matemática.

5. Referência Bibliográfica

[1] Otimização Combinátoria e Programação Linear, Marco C. Goldbarg e Henrique Pacca L. Luna;

[2] Leopoldino, Introdução à Pesquisa operacional Métodos e modelos para analise de decisões, terceira edição, Editora LTC;

[3] http://www.e-commerce.org.br/Artigos/logistica.htm

[4] http://www.investigacion-operaciones.com/Problemas_Transporte/problema_de_transporte.pdf

[5] www.mat.ua.pt/io/Documentos/Acetatos/CapituloII_7_1.pps

[6] www.mat.ua.pt/io/Documentos/Acetatos/CapituloII_4_1.pps

[7] www.densis.fee.unicamp.br/~franca/EA042/aula3b.ppt

[8] www.das.ufsc.br/~camponog/Disciplinas/DAS-6651/Slides/LS8a.pdf

[9] www.moraissilva.com/pl_3.pps

[10] www.engprod.ufjf.br/fernando/epd015/simplex.pdf